Formulaire mathématique à l'usage du physicien

1 Formulaire de trigonométrie

Relations entre les carrés

$$cos^2(a) + sin^2(a) = 1$$

$$1 + tan^2(a) = \frac{1}{cos^2(a)}$$

Formules d'addition

$$cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)$$

$$sin(a+b) = sin(a)cos(b) + cos(a)sin(b)$$

$$tan(a+b) = \frac{tan(a) + tan(b)}{1 - tan(a)tan(b)}$$

$$cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)$$

$$sin(a-b) = sin(a)cos(b) - sin(b)cos(a)$$

$$tan(a-b) = \frac{tan(a) - tan(b)}{1 + tan(a)tan(b)}$$

Formules de duplication

$$cos(2a) = cos^2(a) - sin^2(a) = 1 - 2sin^2(a) = 2cos^2(a) - 1$$

$$sin(2a) = 2sin(a)cos(a)$$

$$tan(2a) = \frac{2tan(a)}{1 - tan^2(a)}$$

Tout en fonction de la tangente de l'arc moitié
Sous réserve de définition, en notant $t = tan(\frac{a}{2})$

$$cos(a) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$sin(a) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$tan(a) = \frac{2t}{1-t^2}$$

Formules de linéarisation

$$cos^2(a) = \frac{1+cos(2a)}{2}$$

$$sin^2(a) = \frac{1-cos(2a)}{2}$$

$$cos(a)cos(b) = \frac{1}{2}(cos(a+b)+cos(a-b))$$

$$sin(a)sin(b) = -\frac{1}{2}(cos(a+b)-cos(a-b))$$

$$sin(a)cos(b) = \frac{1}{2}(sin(a+b)+sin(a-b))$$

Transformation d'une somme ou différence en produit

$$cos(p)+cos(q) = 2cos\frac{p+q}{2}cos\frac{p-q}{2}$$

$$cos(p)-cos(q) = -2sin\frac{p+q}{2}sin\frac{p-q}{2}$$

$$sin(p)+sin(q) = 2sin\frac{p+q}{2}cos\frac{p-q}{2}$$

$$sin(p)-sin(q) = 2cos\frac{p+q}{2}sin\frac{p-q}{2}$$

2 Les nombres complexes

Avec l'écriture mathématique $\underline{u} = a + ib$, on distingue les parties réelle $a = |\underline{u}|cos(\varphi)$ et imaginaire $b = |\underline{u}|sin(\varphi)$, où $|\underline{u}| = \sqrt{a^2+b^2}$ et $\varphi = arg\ \underline{u} = arctan\frac{b}{a}$ (à π près, il faut en plus préciser $sin\varphi$ ou $cos\varphi$).
En physique, on préfère souvent l'écriture : $\underline{u} = |\underline{u}|exp(i\varphi)$.

3 Développements limités

Il est très courant d'utiliser des développements limités en physique, en appliquant simplement la formule de Taylor, dans la majorité des cas à l'ordre 1.

Formule de Taylor : $f(x_0+h) = \sum_n \frac{h^n}{n!}\frac{d^n f}{dx^n} = f(x_0) + h\frac{df}{dx}(x_0) + \frac{h^2}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) + \dots$

4 Equation différentielle du second ordre à coefficients constants

Soit l'équation différentielle : $a\ddot{x} + b\dot{x} + c = e\cos(\omega t)$

L'équation étant linéaire, la solution générale est la superposition d'une solution générale de léquation sans second membre (régime transitoire) et d'une solution particulière de l'équation générale (régime forcé).

- le **régime libre** est solution de $a\ddot{x} + b\dot{x} + c = 0$
L'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ conduit à distinguer les trois cas :
* si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, les deux racines sont réelles, notées r_1 et r_2 et les solutions sont de la forme :
$x(t) = Aexp(r_1 t) + Bexp(r_2 t)$. Le régime est apériodique.
* si $\Delta = 0$, la solution est unique et notée r_0. On démontre que les solutions sont de la forme : $x(t) = (At+B)exp(r_0 t)$. Le régime est critique.
* si $\Delta < 0$, les deux racines sont complexes conjuguées notées r et $\bar{r}$. Les solutions sont de la forme :
$x(t) = Aexp(rt) + Bexp(\bar{r}t)$ ou encore $x(t) = exp(\Re(r)t)(Acos(\Im(r)t) + Bsin(\Im(r)t))$.

- le **régime forcé** est solution particulière de $a\ddot{x} + b\dot{x} + c = e\cos(\omega t)$.
Elle se cherche sous la forme d'une fonction de même pulsation mais déphasée : $x(t) = Acos(\omega t - \varphi)$.

Remarque :
La détermination des constantes d'intégration doit se faire sur la solution générale !

5 Systèmes de coordonnées

5.1 Les systèmes de coordonnées

5.1.1 Les vecteurs de base

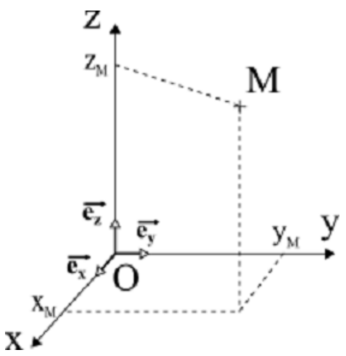

FIGURE 1 – Cartésiennes

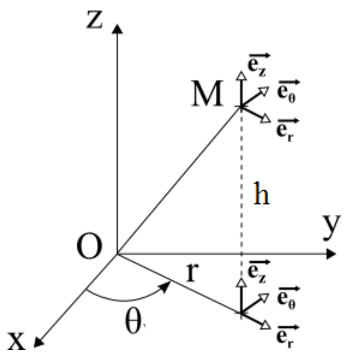

FIGURE 2 – Cylindriques

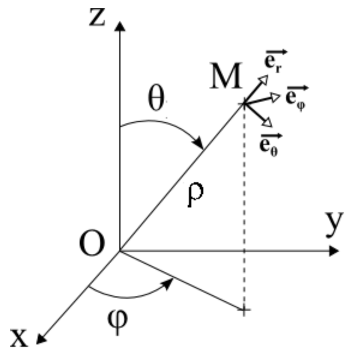

FIGURE 3 – Sphériques

5.1.2 Relations de passage entre les systèmes de coordonnées

Conversion entre systèmes cartésien et cylindrique

A partir des coordonnées cartésiennes (x,y,z), on peut obtenir les coordonnées cylindriques (r,θ,h) grâce au relations suivantes :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$
$$h = z$$

Inversement, on a les relations suivantes :

$$x = r \ \cos \theta$$
$$y = r \ \sin \theta$$
$$z = h$$

Conversion entre systèmes cartésien et sphérique

A partir des coordonnées cartésiennes (x,y,z), on peut obtenir les coordonnées sphériques (ρ,θ,φ) grâce au relations suivantes :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\varphi = \arccos (\frac{z}{\rho})$$
$$\theta = \begin{cases} \arccos (\frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}}) \ si \ y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos (\frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}}) \ si \ y < 0 \end{cases}$$

Inversement, on a les relations suivantes :

$$x = \rho \ \sin \varphi \ \cos \theta$$
$$y = \rho \ sin\varphi \ \cos \theta$$
$$z = \rho \ \cos \varphi$$

Conversion entre systèmes polaire et sphérique

A partir des coordonnées cylindriques (r, θ_c, h), on peut obtenir les coordonnées sphériques (ρ,θ_s,φ) grâce au relations suivantes :

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$$
$$\varphi = \arctan\left(\frac{r}{z}\right)$$
$$\theta_s = \theta_c$$

Inversement, on a les relations suivantes :

$$r = \rho \ \sin\varphi$$
$$\theta_c = \theta_s$$
$$h = \rho \ cos\varphi$$

6 Calcul vectoriel

6.1 Calcul du produit scalaire et du produit vectoriel

On considère deux vecteurs de l'espace et leurs coordonnées cartésiennes $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

Produit scalaire : $\vec{x}.\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = ||x||.||y||.cos(\widehat{\vec{x},\vec{y}})$

Produit vectoriel : $\vec{u} \wedge \vec{y} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_3) = \vec{w}$
D'un point de vue géométrique, $\vec{w} = \vec{x} \wedge \vec{y}$ est l'unique vecteur tel que :
*$\vec{w}$ est orthogonal aux deux vecteurs donnés
*$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{w})$ est une base directe
*$||\vec{w}|| = ||\vec{x}||.||\vec{y}||.|sin(\widehat{\vec{x},\vec{y}})|$

6.2 Formulaire d'analyse vectorielle

6.2.1 Expressions du gradient, de la divergence, du rotationnel et du laplacien dans les différents systèmes de coordonnées

NB : Les formules entres crochets ne sont pas à connaître par coeur.

Coordonnées cartésiennes

$$\vec{\mathrm{grad}}\ V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{\mathrm{u_x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{\mathrm{u_y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{\mathrm{u_z}}$$
$$div\ \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{u_x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{u_y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{u_z}$$
$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Remarque :
Les vecteurs unitaires $\vec{u_x}$, $\vec{u_y}$, $\vec{u_z}$en chaque point, constituent des champs uniformes et ont tous une divergence et un rotationnel nuls.

Coordonnées cylindriques

$\vec{\text{grad}}\ V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{\text{u}_\text{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{\text{u}_\theta} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{\text{u}_\text{z}}$

$\left[div\ \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right]$

$\left[\vec{\text{rot}}\ \vec{A} = (\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z})\vec{u_r} + (\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r})\vec{u_\theta} + \frac{1}{r}(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta})\vec{u_z}\right]$

$\left[\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial V}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right]$

Remarques :
$div\ \vec{u_r} = \frac{1}{r}$; $\vec{\text{rot}}\ \vec{u_r} = \vec{0}$ $div\ \vec{u_\theta} = 0$; $\vec{\text{rot}}\ \vec{u_\theta} = \frac{\vec{u_z}}{r}$; $div\ \vec{u_z} = 0$; $\vec{\text{rot}}\ \vec{u_z} = \vec{0}$

Coordonnées sphériques

$\vec{\text{grad}}\ V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{\text{u}_\text{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{\text{u}_\theta} + \frac{1}{r\ sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{\text{u}_\varphi}$

$\left[div\ \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\ sin\theta}\frac{\partial (sin\theta\ A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\ sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right]$

$\left[\vec{\text{rot}}\ \vec{A} = \frac{1}{r\ sin\theta}(\frac{\partial (sin\theta\ A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi})\vec{u_r} + \frac{1}{r}(\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r})\vec{u_\theta} + \frac{1}{r}(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta})\vec{u_\varphi}\right]$

$\left[\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\ sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2\ sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right]$

Remarques :
$div\ \vec{u_r} = \frac{2}{r}$; $\vec{\text{rot}}\ \vec{u_r} = \vec{0}$; $\vec{\text{rot}}\ \vec{u_\varphi} = \frac{\vec{u_z}}{r\ sin\theta}$; $\vec{\text{grad}}\ \frac{1}{r} = -\frac{\vec{u_r}}{r^2}$

6.2.2 Cacluls et opérateurs

Composition d'opérateurs

$\vec{\text{rot}}\ \vec{\text{grad}}\ V = \vec{0}$

$div\ \vec{\text{rot}}\ \vec{\text{A}} = 0$

$div\ \vec{\text{grad}}\ V = \Delta V$

$\vec{\text{rot}}\ \vec{\text{rot}}\ \vec{\text{A}} = \vec{\text{grad}}\ div\vec{\text{A}} - \Delta\ \vec{\text{A}}$

Théorème D'Ostrogradsky : $\oiint_{(S)} \vec{\text{A}}.\text{d}\vec{\text{S}} = \iiint_{(V)} div\ \vec{\text{A}}.d\tau$
Le flux d'un champ de vecteur à travers une surface fermée est égal à l'intégrale triple de sa divergence étendue au volume intérieur à cette surface.

Théorème de Stokes : $\oint_{(C)} \vec{\text{A}}.\text{d}\vec{\text{M}} = \iint_{(S)} \vec{\text{rot}}\ \vec{\text{A}}.\text{d}\vec{\text{S}}$
La circulation d'un champ de vecteur le long d'un contour fermé est égale au flux de son rotationnel à travers une surface quelconque s'appuyant sur ce contour.

7 Disque, sphère, cylindre

7.1 Disque

Périmètre : .... $2\pi r$
Surface : .... πr^2
Elément de surface : .... $dr.rd\theta = rdrd\theta$
Surface d'une couronne ciruclaire entre r et $r + dr$: .... $2\pi rdr$

7.2 Sphère

Surface : .... $4\pi r^2$
Volume : .... $\frac{4}{3}\pi r^3$
Elément de volume : .... $dr.rd\theta.r\ sin\theta\ d\varphi = r^2 sin\theta drd\theta d\varphi$
Volume d'une coquille sphérique entre r et $r + dr$: .... $4\pi r^2 dr$

7.3 Cylindre

Surface : .... $2\pi rh$
Volume : .... $\pi r^2 h$
Element de volume : .... $dr.rd\theta.dz = rdrd\theta dz$
Volume d'un manchon cylindrique entre r et $r + dr$: .... $2\pi rhdr$

8 Constantes fondamentales

Constante de gravitation : .... $G \approx 6,67.10^{-11}\ N.m^2.s^{-2}$

Célérité de la lumière dans le vide : .... $c = 299792458 m.s^{-1} \approx 3.10^8\ m.s^{-1}$

Perméabilité magnétique du vide : .... $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ H.m^{-1}$

Permittivité diélectrique du vide : .... $\epsilon_0 \approx 8,85.10^{-12}\ F.m^{-1}$

Relation exacte : $\mu_0\epsilon_0 c^2 = 1$

Constante des gaz parfaits : .... $R = 8,314\ J.K^{-1}.mol^{-1}$

Nombre d'Avogadro : .... $\mathcal{N}_A = 6,023.10^2 3\ mol^{-1}$

Constante de Boltzmann : .... $k_B = R/\mathcal{N}_A = 1,38.10^{-23}\ J.K^{-1}$

Constante de Planck : .... $h = 6,62.10^{-34}\ J.s$

Quanta d'énergie électromagnétique de fréquence ν : $E = h\nu$